Calculs des activités dans une filiation radioactive

Ch. de la Vaissière octobre 2008

Notations

t : temps, dt intervalle de temps élémentaire

n,i,k (indices) : ordre dans la filiation (0 père, 1 fils, 2 petit-fils , etc …)

$x_n(t)$: nombre de noyaux de l'élément n à l'instant t

$a_n(t)$ activité de l'élément n à l'instant t

$x'_n(t)$ et $x'_n(t)$ dérivées par rapport au temps de $x_n(t)$ et $a_n(t)$

t=0 : instant unitial

A = Activité initiale de l'ancêtre (père) de la filiation

T_n : période radioactive de l'élément n

λ_n : probabilité de désintégration de l'élément n

$$\lambda_n = Ln(2)/ T_n = 0{,}693/ T_n$$

exp $(-\lambda t)= e^{-\lambda t}$: Loi de décroissance exponentielle

g_k : coefficient de l'exponentielle exp(- λ_k t) dans la somme d'exponentielles intervenant dans la formule de l'activité $a_n(t)$. On appellera g_k les mêmes coefficients dans la formule de l'activité $a_{n-1}(t)$.

Hypothèses initiales

Au temps 0 on suppose que seul l'ancêtre de la filiation est présent

$$a_0(0)= A$$

$$a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = \dots = a_n(0)$$

Relation de base

Relation (eq 1)entre $x_n(t)$ et $a_n(t)$

$$a_n(t) = \lambda_n\, x_n(t)$$

Il suffit de faire les calculs pour les activités $a_n(t)$

Pour passer au nombre d'atomes, on utilisera

$$x_n(t) = a_n(t) / \lambda_n$$

Equations différentielles

Les équations reliant les activités et leurs dérivées sont des équations différentielles à coefficients constant dont la solution est une somme d'exponentielles. On obtient la relation entre

$$x_n(t) \text{ et } x_{n-1}(t) \text{ ou } a_n(t) \text{ et } a_{n-1}(t)$$

En faisant la différence entre noyaux formés et désintégrés

Nombre de noyaux n disparaissant pendant dt (n ---> n +1)

$$\lambda_n\, x_n(t)\, dt$$

Nombre de noyaux n formés pendant dt (n -1 ---> n)

$$\lambda_{n-1}\, x_{n-1}(t)\, dt$$

Variation du nombre de noyaux

$$dx_n(t) = x'_n(t)\, dt = (\lambda_{n-1}\, x_{n-1}(t) - \lambda_n\, x_n(t))\, dt$$

$$x'_n(t) = (\lambda_{n-1}\, x_{n-1}(t) - \lambda_n\, x_n(t))$$

$$x'_n(t) + \lambda_n\, x_n(t) = \lambda_{n-1}\, x_{n-1}(t) \qquad \text{(eq 2)}$$

$$a'_n(t) + \lambda_n\, a_n(t) = \lambda_n\, a_{n-1}(t)$$

Equations des activités : solutions

$$a'_n(t) + \lambda_n a_n(t) = \lambda_n a_{n-1}(t)$$

Hypothèses d'une filiation simple

Le père (n=0) n'a pas d'ancêtre :

$$a'_0(t) + \lambda_0 a_0(t) = 0$$

A l'instant initial, seul l'élément père existe

$$a_n(0) = 0 \text{ sauf } a_0(0) = A$$

Le noyau père (ancêtre) décroît selon une loi **exponentielle simple** (Eq 3)

$$a_0(t) = A \exp(-\lambda_0 t)$$

Pour les noyaux de la filiation $a_n(t)$ est la somme de **n+1 exponentielles**.

Si $a_{n-1}(t)$ est déjà sous cette forme (Eq 4)

$$a_{n-1}(t) = f_0 \exp(-\lambda_0 t) + f_1 \exp(-\lambda_1 t) + \ldots + f_{n-1} \exp(-\lambda_{n-1} t)$$

On peut vérifier (Eq 5) que

$$a_n(t) = g_0 \exp(-\lambda_0 t) + g_1 \exp(-\lambda_1 t) + \ldots + g_{n-1} \exp(-\lambda_{n-1} t) + g_n \exp(-\lambda_n t)$$

Vérifie l'équation avec les valeurs de g_i pour i allant de 0 à n-1

$$g_i = f_i \lambda_n / (\lambda_n - \lambda_i) \qquad \text{(Eq 6)}$$

g_n est obtenu en appliquant la condition $a_n(t) = 0$ au temps 0

$$g_n = -(g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1}) \qquad \text{(Eq 7)}$$

Application fils, petit fils

Rappel de l'équation générale (Eq 2)

$$a'_n(t) + \lambda_n a_n(t) = \lambda_n a_{n-1}(t)$$

Fils n = 1

On part de $a_0(t) = A \exp(-\lambda_0 t)$ ----> $f_0 = A$

On a donc

$$g_0 = A \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0) \text{ et } g_1 = - g_0 = A \lambda_1 / (\lambda_0 - \lambda_1)$$

L'expression de $a_1(t)$ est (Eq 8) :

$$a_1(t) = A \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0) (\exp(-\lambda_0 t) - \exp(-\lambda_1 t))$$

Petit fils n = 2

D'après l'expression précédente de $a_1(t)$

$$f_0 = A \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0) \text{ et } f_1 = A \lambda_1 / (\lambda_0 - \lambda_1)$$

On a pour g_0 et g_1

$$g_0 = f_0 \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_0) = A \lambda_1 \lambda_2 / ((\lambda_2 - \lambda_0) (\lambda_1 - \lambda_0))$$

$$g_1 = f_1 \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_1) = A \lambda_1 \lambda_2 / ((\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_0 - \lambda_1))$$

g_2 est obtenu en appliquant la condition $g_2 = - (g_0 - g_1)$

$$g_2 = A \lambda_1 \lambda_2 / ((\lambda_2 - \lambda_0) (\lambda_2 - \lambda_1))$$

On a (Eq 9) pour $a_2(t)$

$$\begin{aligned} a_2(t) = A \lambda_1 \lambda_2 \; (& \exp(-\lambda_0 t)/ ((\lambda_2 - \lambda_0) (\lambda_1 - \lambda_0)) \\ & + \exp(-\lambda_1 t)/ ((\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_0 - \lambda_1)) \\ & + \exp(-\lambda_2 t)/ ((\lambda_0 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_2))) \end{aligned}$$

Cas λ_0 très petit

Dans le cas des filiations naturelles de l'uranium et du thorium dont les périodes sont de l'ordre du milliard d'années, λ_0 qui est très petit par rapport aux autres λ peut être assimilé à 0

Fils n = 1

L'expression (Eq 8) de $a_1(t)$

$$a_1(t) = A\,\lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0)\ \ (\exp(-\lambda_0\, t) - \exp(-\lambda_1\, t))$$

devient

$$a_1(t) = A\,(1 - \exp(-\lambda_1 t)) = a_0(t) - A\exp(-\lambda_1 t))$$

Pour t = o, $a_1(t) = 0$

Pour t grand par rapport à T_1 **:** $a_1(t) = a_0(t)$

Petit fils n = 2

On réécrit la formule (Eq 9) de $a_2(t)$ en mettant en évidence l'activité exponentielle de l'ancêtre père $a_0(t)$

(Eq 10) $$a_2(t) = \{\lambda_1\,\lambda_2 / ((\lambda_2 - \lambda_0)\,(\lambda_1 - \lambda_0\,)\}\ a_0(t)$$

$$+ \{A\,\lambda_1\,\lambda_2 / ((\lambda_2 - \lambda_1)\ \}\ \{\exp(-\lambda_1\, t)/(\lambda_0 - \lambda_1\,) - \exp(-\lambda_2\, t)/(\lambda_0 - \lambda_2)\}$$

Si λ_0 est négligeable par rapport à λ_1 et λ_2, on a (Eq 11)

$$a_2(t) = a_0(t) - A\,\{\lambda_2\exp(-\lambda_1\, t) - \lambda_1\exp(-\lambda_2\, t)\}/\,(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Pour t = o

$a_0(t) = A$, les exponentielles sont égales à 1 : $a_2(0) = 0$

Comme $a_1(0)$, il résulte de $a'_2(t) + \lambda_2\, a_2(t) = \lambda_2\, a_1(t)$ que $a'_2(0) = 0$

$a_2(0)$ et la première dérivée $a'_2(0)$ sont nuls

Pour t grand par rapport à T_1 **et** T_2

les exponentielles en λ_1 et λ_2 sont nulles : $a_2(t) = a_0(t)$

C'est l'équilibre radioactif

Calcul des g_i en fonction des périodes

La formule (Eq 6) donnant le coefficient g_i de l'exponentielle $\exp(-\lambda_i t)$ dans l'expression de $a_n(t)$ à partir du coefficient f_i correspondant dans $a_{n-1}(t)$

$$g_i = f_i \lambda_n / (\lambda_n - \lambda_i)$$

s'exprime en fonction des périodes $T = Ln(2)/\lambda$

$$g_i = f_i T_i / (T_i - T_n)$$

Cas où un descendant (ou plusieurs) est présent au départ.

Son activité initiale n'est alors pas nulle.

$a_k(0) = X_k(0) / \lambda_k$

Pour ce descendant k on remplace (Eq 7) le calcul de g_k

$$g_k = -(g_0 + g_1 + g_2 + \ldots.. + g_{k-1})$$

par

$$g_k = a_k(0) - (g_0 + g_1 + g_2 + \ldots.. + g_{k-1})$$

Table des g_i pour les premières générations

Fils n=1

i =0 $g_0 = -A \lambda_1 / (\lambda_0 - \lambda_1)$

i =1 $g_1 = -A \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0)$

Petit-fils n=2

i =0 $g_0 = A \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_1)$

i =1 $g_1 = A \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_0)$

i =2 $g_2 = A \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_0)$

Arrière petit-fils n=3

i =0 $g_0 = -A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / (\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_1)$

i =1 $g_1 = -A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_0)$

i =2 $g_2 = -A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_1)$

i =3 $g_3 = -A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_0)$

Arrière arrière petit-fils n=3

i =0 $g_0 = A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 / (\lambda_0 - \lambda_4)(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_1)$

i =1 $g_1 = A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 / (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_0)$

i =2 $g_2 = A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 / (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_0)$

i =3 $g_3 = A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 / (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_0)$

i =4 $g_4 = A \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 / (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_0)$